

Phân tích hệ kết cấu phẳng bằng phương pháp phân tử hữu hạn ứng dụng Matlab

Fem analysis of plane structures with matlab

> TS TRINH TỰ LỰC

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội
Email: tuluc72@yahoo.com

TÓM TẮT

Phương pháp phân tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp quan trọng và hiệu quả để phân tích kết cấu. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp PTHH để tính toán các hệ kết cấu siêu tĩnh bậc cao luôn gặp khó khăn về mặt toán học. Việc đưa các phần mềm toán giải quyết các khó khăn trên khi tính nội lực, chuyển vị hệ kết cấu trong phương pháp PTHH là rất cần thiết. Bài báo trình bày cách áp dụng phần mềm MATLAB vào phương pháp PTHH để tính toán nội lực, chuyển vị hệ kết cấu phẳng.

Từ khóa: phương pháp PTHH; nội lực phân tử; chuyển vị phân tử; phần mềm MATLAB

ABSTRACT:

Finite element method (FEM) is an important and indispensable method for structural analysis. However, using FEM to the calculation of large structural systems is always difficult in mathematics. The introduction of mathematical software to solve mathematical problems when calculating the element force, element displacement in FEM is very necessary. This paper presents application of MATLAB software to FEM for calculating the element force, element displacement of the plane truss, beam and the plane frame.

Keywords: Finite element method (FEM); element force; element displacement; MATLAB software

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Với các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp, việc tính toán nội lực và chuyển vị là nhiệm vụ rất cơ bản và quan trọng. Việc tính toán được thực hiện bởi nhiều phương pháp, nhưng nhìn chung, có thể đưa về 2 nhóm chính: nhóm các phương pháp giải tích và nhóm các phương pháp số. Các phương pháp giải tích cho kết quả chính xác, tuy nhiên với những hệ phức tạp có nhiều phần tử, có độ cứng phần tử thay đổi, khối lượng tính toán lớn, rất khó khăn về mặt toán học. Cùng với việc phát triển của máy tính điện tử, nhóm các phương pháp số ra đời, trong đó phải kể đến phương

pháp phân tử hữu hạn - mô hình chuyển vị (trong phạm vi bài báo viết tắt là PTHH). Đây là phương pháp rất hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học, trong đó có việc tính toán nội lực, chuyển vị của hệ kết cấu. Trong phương pháp PTHH các dữ liệu đầu vào như sơ đồ tính, sơ đồ tải trọng đều được số hóa nên việc nhập dữ liệu đầu vào rất dễ dàng. Toàn bộ sơ đồ tính được đưa về ma trận độ cứng, sơ đồ tải trọng được đưa về véc tơ tải trọng nút. Việc tính chuyển vị nút còn lại là giải phương trình cân bằng dưới dạng ma trận. Vấn đề đặt ra là khi gặp những hệ kết cấu lớn có nhiều phần tử thanh, nhiều bậc tự do là các thành phần chuyển vị tại nút sẽ gặp khó về mặt tính toán. Điều đó dẫn đến việc phải kết hợp phần mềm toán vào phương pháp PTHH để phân tích hệ kết cấu được đơn giản hơn.

Các phần mềm toán học có thể được chia ra 2 nhánh: các ngôn ngữ lập trình chuyên nghiệp phù hợp với trình độ chuyên sâu về kỹ thuật lập trình và các phần mềm toán học phù hợp với việc học tập nghiên cứu của sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh với trình độ không chuyên về kỹ thuật lập trình. Trên cơ sở phân tích tính năng của các phần mềm toán học thông dụng, cùng với kinh nghiệm ứng dụng các phần mềm toán vào giảng dạy tại trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, tác giả nhận thấy việc áp dụng MATLAB vào phương pháp PTHH để phân tích hệ kết cấu là rất hiệu quả đối với việc học tập và nghiên cứu của sinh viên và học viên cao học. Phần mềm MATLAB có các ưu điểm vượt trội với các bài toán ma trận, các bài toán cần được số hóa, cần được lập trình và tự động hóa cao. Phần mềm MATLAB trợ giúp cho việc tính toán và hiển thị rất ưu việt. Các lệnh của MATLAB mạnh và hiệu quả, cho phép giải các loại hình toán khác nhau, đặc biệt hữu dụng cho các hệ phương trình tuyến tính hay các bài toán ma trận được gặp nhiều trong phương pháp PTHH.

2. THIẾT LẬP TRÌNH TỰ TÍNH NỘI LỰC, CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH PHẪNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PTHH ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATLAB

2.1. Phương pháp PTHH tính nội lực, chuyển vị của hệ thanh phẳng

Trong phương pháp PTHH - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm xấp xỉ (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Áp dụng phương pháp PTHH - mô hình chuyển vị để phân tích nội lực, chuyển vị được triển khai theo các bước sau:

- Rời rạc hoá miền khảo sát V thành các miền con V_e (với hệ thanh là các phần tử thanh). Đặt ký hiệu cho các phần tử, các nút và các bậc tự do tương ứng với số chuyển vị tại các nút.

- Thiết lập phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (2.1)$$

trong đó:

- $\{U\}$ - vectơ chuyển vị nút của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

[K] - ma trận độ cứng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

{F}- vectơ tải trọng nút của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

Để giải được hệ phương trình (2.1), định thức của ma trận [K] cần phải khác 0 (det [K] khác 0), tức là phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thỏa mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định. Ngoài ra phải thỏa mãn điều kiện liên tục tại các nút của hệ kết cấu.

Sau khi đưa vào các điều kiện biên, điều kiện liên tục, phương trình cân bằng mới được biểu diễn như sau:

$$[k]\{u\} = \{f\} \quad (2.2)$$

trong đó:

{u} - được xây dựng từ {U} sau khi loại bỏ các thành phần chuyển vị bằng 0;

[k] - được xây dựng từ [K] sau khi loại bỏ các hàng và cột tương ứng với thành phần chuyển vị bằng 0;

{f} - được xây dựng từ {F} sau khi loại bỏ các hàng tương ứng với thành phần chuyển vị bằng 0.

▪ Giải hệ phương trình cân bằng:

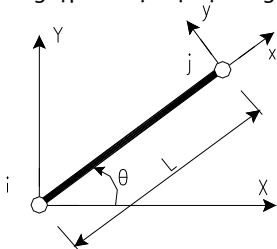
$$\{u\} = [k]^{-1}\{f\} \quad (2.3)$$

▪ Xác định nội lực: từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vectơ chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ riêng. Từ đó xác định được nội lực, cũng như biến dạng, ứng suất của điểm bất kỳ trong phần tử nhờ các quan hệ đã có trong Cơ học kết cấu và Lý thuyết đàn hồi.

2.2. Xây dựng hàm MATLAB tính chuyển vị và nội lực hệ thanh phẳng [3,4,5]

2.2.1. Phần tử thanh dàn

Xét phần tử thanh dàn i-j trong bài toán phẳng, có độ cứng EA, chiều dài L, chịu biến dạng dọc trục. Tại mỗi nút sẽ có 2 bậc tự do: chuyển vị theo phương dọc trục và chuyển vị theo phương vuông góc trục. Hệ tọa độ riêng của phần tử là xy. Hệ tọa độ chung của kết cấu là XY có phương lập với hệ tọa độ riêng một góc θ (Hình 1).



Hình 1. Phần tử thanh dàn

Các hàm MATLAB trong bài toán tính chuyển vị và nội lực hệ dàn phẳng:

PT_ThanhDan_DoDai(X1,Y1,X2,Y2): hàm xác định chiều dài phần tử thanh.

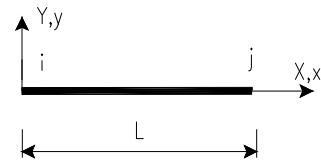
PT_ThanhDan_DoCung(E,A,L,theta): hàm xác định ma trận độ cứng phần tử thanh.

PT_ThanhDan_GhepDoCung(K,k,i,j): hàm ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử thanh vào thành ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ kết cấu [K].

PT_ThanhDan_NoiLuc(E,A,L,theta,u): hàm xác định nội lực các phần tử thanh.

2.2.2. Phần tử thanh dầm

Xét phần tử thanh chịu uốn i-j trong bài toán phẳng, có độ cứng EI, chiều dài L. Tại mỗi nút sẽ có 2 bậc tự do: chuyển vị theo phương vuông góc trục và chuyển vị xoay. Hệ tọa độ riêng của phần tử xy trùng với hệ tọa độ chung XY (Hình 2).



Hình 2. Phần tử thanh dầm

Các hàm MATLAB trong bài toán tính chuyển vị và nội lực hệ dầm:

PT_ThanhDam_DoCung(E,I,L): hàm xác định ma trận độ cứng phần tử thanh.

PT_ThanhDam_GhepDoCung(K,k,i,j): hàm ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử thanh vào thành ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ kết cấu [K].

PT_ThanhDam_Tai_q(L,r,q): hàm xác định vectơ tải trọng nút khi tải là lực phân bố đều đặt vuông góc trục thanh.

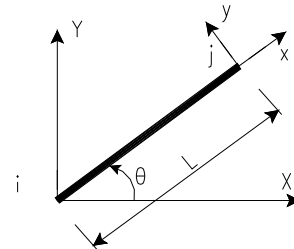
PT_ThanhDam_Tai_T_M(b,c,L,T,M): hàm xác định vectơ tải trọng nút khi tải là lực tập trung vuông góc trục thanh T và mô men M.

PT_ThanhDam_GhepTai(P,p,i,j): hàm ghép nối các vectơ tải trọng nút {p} của các phần tử vào vectơ tải trọng nút của toàn hệ kết cấu {P}.

PT_ThanhDam_NoiLuc(k,u): hàm xác định nội lực các phần tử do nguyên nhân chuyển vị tại các đầu nút. Muốn xác định nội lực của mọi biến dạng, cần thêm nguyên nhân do tải trọng tác dụng trong thanh gây ra.

2.2.3. Phần tử thanh trong hệ khung

Xét phần tử thanh trong khung i-j trong bài toán phẳng, có độ cứng EA, EI, chiều dài L. Tại mỗi nút sẽ có 3 bậc tự do: chuyển vị theo phương dọc trục, chuyển vị theo phương vuông góc trục và chuyển vị xoay. Hệ tọa độ riêng của phần tử là xy. Hệ tọa độ chung của kết cấu là XY có phương lập với hệ tọa độ riêng một góc θ (Hình 3).



Hình 3. Phần tử thanh trong hệ khung

Các hàm MATLAB trong bài toán tính chuyển vị và nội lực hệ khung phẳng:

PT_ThanhUKN_DoDai(X1,Y1,X2,Y2): hàm xác định chiều dài phần tử thanh.

PT_ThanhUKN_DoCung(E,A,I,L,theta): hàm xác định ma trận độ cứng phần tử.

PT_ThanhUKN_GhepDoCung(K,k,i,j): hàm ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử thanh [k] vào thành ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ kết cấu [K].

PT_ThanhUKN_Tai_r_q(L,r,q): hàm xác định vectơ tải trọng nút khi tải là lực phân bố đều r đặt dọc trục và lực phân bố đều q đặt vuông góc trục thanh.

PT_ThanhUKN_Tai_N_T_M(b,c,L,T,M): hàm xác định vectơ tải trọng nút khi tải là lực tập trung đặt dọc trục N, lực vuông góc trục thanh T và mô men M.

PT_ThanhUKN_Tai_HTDCung(theta,p): hàm chuyển vectơ tải trọng nút {p} của các phần tử thanh thứ e từ hệ tọa độ riêng về hệ tọa độ chung.

PT_ThanhUKN_GhepTai(P,p,i,j): hàm ghép nối các vectơ tải trọng nút {p} của các phần tử thanh vào vectơ tải trọng nút của toàn hệ kết cấu {P}.

PT_ThanhUKN_Noiluc(E,A,I,L,theta,u): hàm xác định nội lực các phần tử do nguyên nhân chuyển vị tại các đầu nút. Muốn xác định nội lực của mọi nguyên nhân, cần thêm nguyên nhân do tải trọng tác dụng trong thanh gây ra.

2.3. Thiết lập trình tự giải bài toán hệ thanh phẳng bằng phương pháp PTHH [1,2]

Bài toán phân tích hệ thanh phẳng bằng phương pháp PTHH được tác giả viết chương trình tính toán ứng dụng phần mềm MATLAB. Sơ đồ khối và thuật toán giải bao gồm các bước như sau:

Bước 1: Khai báo thông số đầu vào về hình học và vật liệu cho hệ như: chiều dài phần tử; diện tích, mô men quán tính mặt cắt tiết diện; giá trị mô đun đàn hồi E;

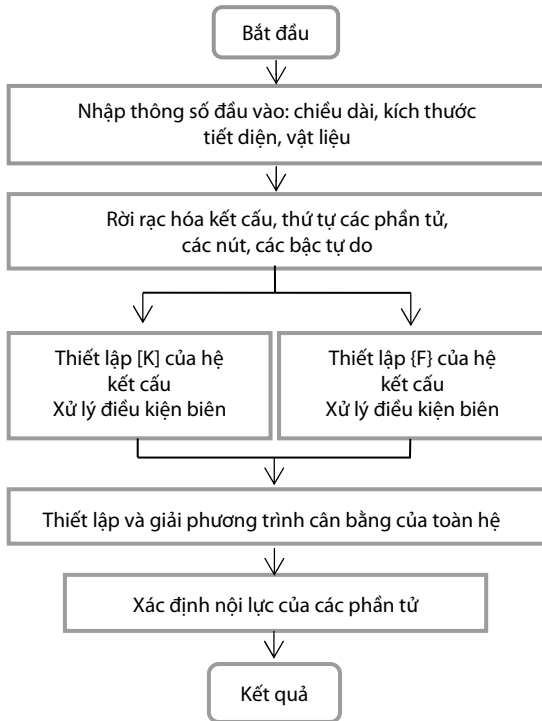
Bước 2: Rời rạc hóa hệ kết cấu; đánh thứ tự phần tử; thứ tự các nút; bậc tự do tại các nút; lập hệ tọa độ chung XY.

Bước 3: Thiết lập ma trận độ cứng toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung. Xử lý điều kiện biên.

Bước 4: Thiết lập vec tơ tải trọng nút toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung. Xử lý điều kiện biên.

Bước 5: Giải phương trình cân bằng thu được chuyển vị tại các nút..

Bước 6: Xác định nội lực tại vị trí các nút của các phần tử thanh.

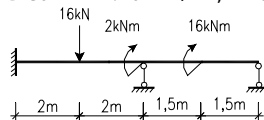


Hình 4. Sơ đồ khối chương trình

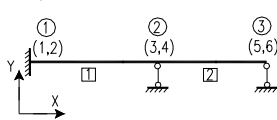
3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Sử dụng chương trình viết trong MATLAB tính toán hệ kết cấu trên hình 5 bằng phương pháp PTHH.

Biết $E = 24.10^5 \text{ kN/m}^2$; $I = 0,03 \text{ m}^4$.



Hình 5. Hệ kết cấu



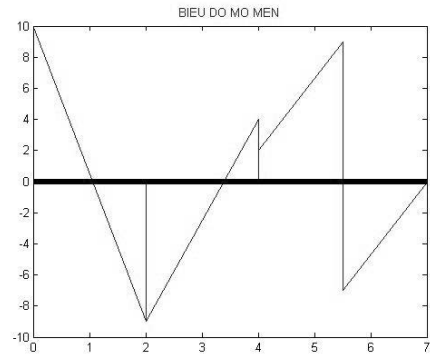
Hình 6. Sơ đồ rời rạc hóa

Rời rạc hóa hệ kết cấu thành 2 phần tử với các nút và bậc tự do như trên hình 6. Sử dụng code MATLAB được tác giả viết với các hàm MATLAB của hệ dầm, thu được nội lực của 2 phần tử (được thể hiện trong bảng 1 và trong biểu đồ nội lực trên hình 7, hình 8).

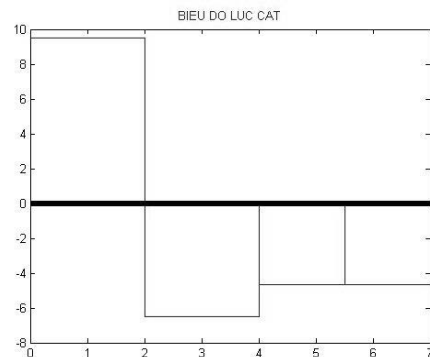
Kết quả thu được:

Bảng 1. Giá trị nội lực các phần tử

Nội lực	Phần tử 1	Phần tử 2
Qi	9.500	-4.667
Mi	10.000	2.000
Qj	6.500	4.667
Mj	-4.000	0.000



Hình 7. Biểu đồ (M)



Hình 8. Biểu đồ (Q)

4. KẾT LUẬN

Sử dụng MATLAB trong phương pháp PTHH cho phép áp dụng với các hệ kết cấu thanh phẳng có bậc siêu tĩnh tùy ý mà không gặp trở ngại về mặt toán học. Trên cơ sở lý thuyết của phương pháp PTHH cùng với phần mềm MATLAB, tác giả đã xây dựng các hàm MATLAB cho bài toán hệ thanh phẳng, thiết lập trình tự, cũng như viết chương trình để giải một số ví dụ cụ thể, cho kết quả tin cậy. Việc ứng dụng các phần mềm toán nói chung và MATLAB nói riêng vào phục vụ việc học tập, giảng dạy với sinh viên, học viên cao học ngành kỹ thuật xây dựng là rất cần thiết và hữu ích.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Văn Đạt, Tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn, Nhà xuất bản Xây dựng, 2017.
2. Nguyễn Thời Trung, Nguyễn Xuân Hùng, Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng MATLAB, Nhà xuất bản Xây dựng, 2015.
3. P.I. Kattan, MATLAB Guide to Finite Elements, Springer, 2007.
4. A.J.M. Ferreira, MATLAB Codes for Finite Element Analysis, Springer, 2009.
5. B. Herbert, Development and Application of The Finite Element Method Based on MATLAB, Springer, 2010.